Algorithmique à garantie de performance
1er cas d'étude
L'ensemble dominant probabiliste

Nicolas Boria, Cécile Murat, Vangelis Paschos

Lamsade, Université Paris Dauphine

GDR RO
2-4 septembre 2015

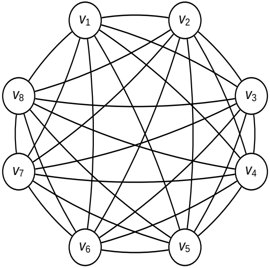
Un exemple pour le voyageur de commerce

- Distribution de plateaux repas

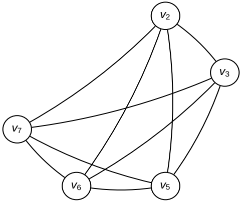
  [J.J. BARTHOLDI, L.K. PLATZMAN, R.L. COLLINS, W.H. WARDEN, A minimal technology routing system for meals on wheels, *Interfaces*, 1983]

- Le problème du voyageur de commerce probabiliste

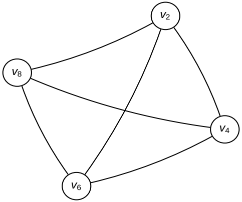
  [P. JAILLET, A priori solution of a traveling salesman problem in which a random subset of the customers are visited, *Oper. Res.*, 1988]



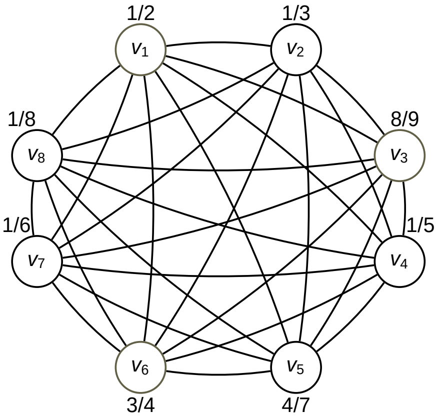
Un jour J



Un jour J'



Un exemple pour le voyageur de commerce probabiliste



Pas le temps de recalculer une solution chaque matin : trouver une solution qui sera facilement adaptable

Méthodologie : l'optimisation a priori

[P. JAILLET, A. ODONI, Vehicule routing: Methods and studies, 1988]

[D.J. BERTSIMAS, Probabilistic combinatorial optimization problems, *PhD thesis*, MIT, 1988]

[P. JAILLET, Shortest path problems with node failures, *Networks*, 1992]

[D.J. BERTSIMAS, The probabilistic minimum spanning tree problem, *Networks*, 1988]

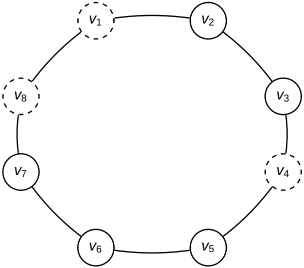
Pourquoi?

- Problème combinatoire NP-difficile à résoudre pour des sous-instances
- Quand l'instance est connue, pas le temps pour en refaire la résolution complète

Comment?

- Déterminer une solution, en supposant que tous les éléments sont présents
  $\Rightarrow$ Solution dite a priori
- Pouvoir adapter cette solution à l'instance qui se réalise rapidement
  $\Rightarrow$ Stratégie de modification

Stratégie de modification pour le voyageur de commerce



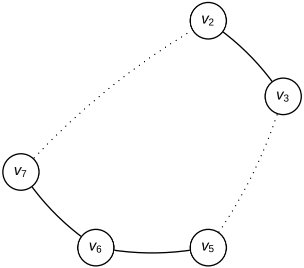


Illustration : problème du stable probabiliste

Problème du stable maximum probabiliste avec la stratégie de modification TRACE, T
Garder dans la solution du sous-graphe $G[V']$ les sommets de la solution a priori qui sont présents dans V'

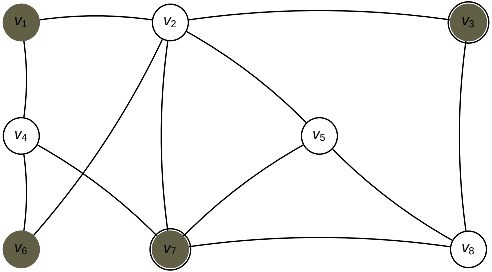
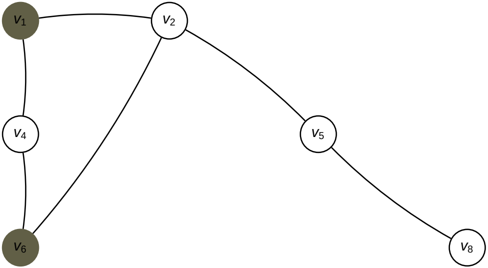


Illustration : problème du stable probabiliste



Définition

S : une solution a priori du problème Π
$\mathtt{M}$: une stratégie de modification
$S(G[V'], \mathtt{M})$: la solution induite sur le sous-graphe $G' = G[V']$ de valeur $v(S(G[V'], \mathtt{M}), G[V'])$
$Pr[V']$: la probabilité d'occurrence du sous-graphe G'
La fonctionnelle du problème a priori ΠP :

$$E_{\Pi P}(G, S, \mathtt{M}) = \sum_{V' \subseteq V} Pr[V'] v(S(G[V'], \mathtt{M}), G[V'])$$

Définition [C.M.,V.Paschos, *Probabilistic Combinatorial optimization on Graphs*, 2006]

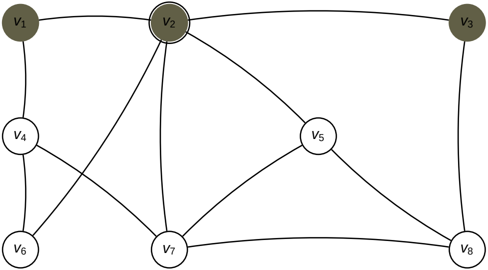
Etant donnée une instance (G, Pr) de ΠP sous la stratégie $\mathtt{M}$, résoudre la version a priori revient à déterminer la solution a priori S qui optimise $E_{\Pi P}(G, S, \mathtt{M})$.

- Deux stratégies distinctes $\mathtt{M}_1$ et $\mathtt{M}_2$ associées au même problème Π, mènent à deux problèmes a priori distincts, repectivement ΠP_1 et ΠP_2.
- Complexité des problèmes :
  première difficulté avec expression de la fonctionnelle!
- Stratégie très étudiée = TRACE = sans recours

Application à un réseaux de capteurs

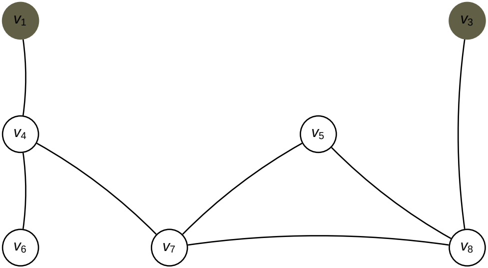
- Réseaux de capteurs : capteurs "maîtres" (équipés et programmés)/ capteurs "esclaves"
- Identifier un sous-ensemble tels que tous les esclaves soient reliés à un des maîtres $\Leftrightarrow$ Déterminer un ensemble dominant (en général de coût minimum ou cardinalité minimun)
- Panne des capteurs $\Leftrightarrow$ Déterminer un nouvel ensemble dominant rapidement pour rester opérationnel (contraintes : les capteurs qui ont déjà été programmés resteront dans la solution, pour limiter les changements à apporter)

Un exemple d'ensemble dominant a priori



Un exemple pour l'ensemble dominant où v_2 absent

L'application de T n'est pas réalisable

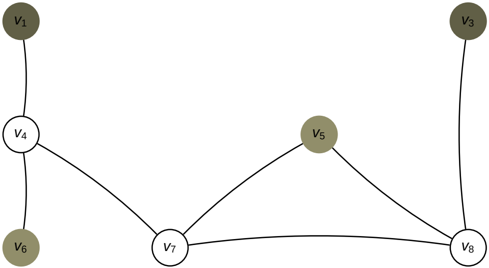


Une stratégie de modification plus élaborée

Stratégie :

- $S' \leftarrow S \cap V'$
- $S'' \leftarrow \textsc{glouton}(G' \setminus (S' \cup \Gamma(S')))$
- $S' \leftarrow S' \cup S''$

v_2 absent



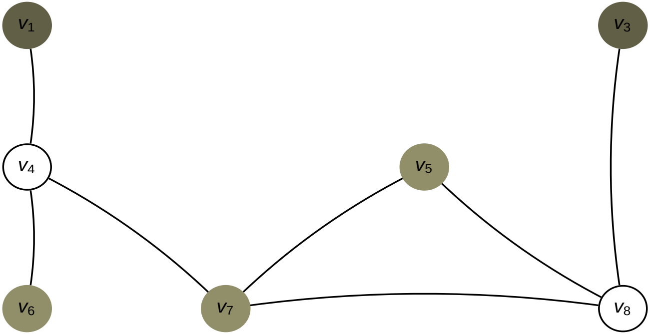
Théorème [C.M., V. Paschos, 2015]

Le calcul de la fonctionnelle du problème de l'ensemble dominant, sous la stratégie de modification gloutonne, est ♯P-complet.

Preuve : réduction à partir du problème ♯2-SAT

Stratégie : ajouter à S' tous les sommets non dominés

Exemple avec v_2 absent :



Calcul de la fonctionnelle polynomial

Théorème [N. Boria, C.M., V. Paschos, CSR2013]

Le calcul de la fonctionnelle du problème de l'ensemble dominant, sous la seconde stratégie de modification, est polynomial.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(G,D,S) &= \sum_{V'\subseteq V} \Pr\left[V'\right] \sum_{v_i\in V} \mathbf{1}_{v_i\in D'} = \sum_{v_i\in V}\sum_{V'\subseteq V} \Pr\left[V'\right]\cdot \mathbf{1}_{v_i\in D'} \\
&= \sum_{v_i\in D}\sum_{V'\subseteq V} \Pr\left[V'\right]\cdot \mathbf{1}_{v_i\in V'} \\
&\quad + \sum_{v_i\notin D}\sum_{V'\subseteq V} \Pr\left[V'\right]\cdot \mathbf{1}_{(v_i\in V')\cap(\Gamma(v_i)\cap(D\cap V')=\emptyset)} \\
&= \sum_{v_i\in D} p_i + \sum_{v_i\notin D}\sum_{V'\subseteq V} \Pr\left[V'\right]\cdot \mathbf{1}_{(v_i\cap V'=v_i)}\cdot \mathbf{1}_{\Gamma(v_i)\cap(D\cap V')=\emptyset} \\
&= \sum_{v_i\in D} p_i + \sum_{v_i\notin D} p_i \cdot \prod_{v_j\in\Gamma(v_i)\cap D} (1-p_j) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Complexité

- Si fonctionnelle calculable en temps polynomial et Π est NP-difficile alors ΠP est NP-difficile (cas particulier où tous les $p_i = 1$)
- Si fonctionnelle est calculable en temps polynomial et Π est polynomial, alors la complexité de ΠP?

Application pour l'ensemble dominant a priori :

- Approximation dans le cas général
- Résolution à l'aide de la programmation dynamique pour les chaînes, cycles et arbres avec degré maximum borné

Rapport d'approximation avec probabilités identiques

Proposition

Le problème de l'ensemble dominant a priori sous la stratégie S, avec probabilités de panne des sommets identiques, admet un algorithme approché de rapport $\Delta - \ln \Delta$, où Δ est le degré maximum de G

Algorithme approché :
prendre comme solution a priori, le plus petit ensemble entre celui fourni par l'algorithme glouton de l'ensemble dominant dans G (admettant un rapport $(1 + \ln \Delta)$, émanant de l'algorithme approché pour le problème de l'ensemble couvrant minimum) et son complémentaire dans V.

Analyse du rapport probabilités identiques (début)

- Etant donné D un ensemble dominant minimal :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G, D, S) &\leqslant p|D| + (n - |D|)p(1-p) \;=\; p^2|D| + pn(1-p) \\ &\leqslant p^2(1 + \ln\Delta)|\hat{D}| + p(1-p)n \end{aligned} \tag{2}$$

  où $\hat{D}$ est un ensemble dominant optimal pour G.

- Etant donné D^* l'ensemble dominant a priori optimal :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G, D^*, S) &\geqslant p|D^*| + p(n - |D^*|)(1-p)^{\Delta} \\ &\geqslant p\left(1 - (1-p)^{\Delta}\right)|D^*| + pn(1-p)^{\Delta} \end{aligned} \tag{3}$$

Analyse du rapport probabilités identiques (2/3)

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}(G, D, \mathrm{S})}{\mathbb{E}\left(G, D^{*}, \mathrm{S}\right)} & \leqslant \frac{p|D|+n(1-p)}{\left(1-(1-p)^{\Delta}\right)\left|D^{*}\right|+n(1-p)^{\Delta}} && (4) \\
& \leqslant \frac{p(1+\ln \Delta)|\hat{D}|+n(1-p)}{\left(1-(1-p)^{\Delta}\right)\left|D^{*}\right|+n(1-p)^{\Delta}} && (5) \\
& \leqslant \frac{p(1+\ln \Delta)\left|D^{*}\right|+n(1-p)}{\left(1-(1-p)^{\Delta}\right)\left|D^{*}\right|+n(1-p)^{\Delta}} \\
& \leqslant \frac{p(1+\ln \Delta)\left|D^{*}\right|+n(1-p)}{\left|D^{*}\right|} && (6) \\
& \leqslant p(1+\ln \Delta)+(1-p)(\Delta+1) \\
& \leqslant \Delta+1-p(\Delta-\ln \Delta) && (7)
\end{aligned}
$$

Si $p \geqslant \frac{(\ln \Delta+1)}{(\Delta-\ln \Delta)}=\frac{\ln (e \Delta)}{(\Delta-\ln \Delta)}$ alors le ratio dans (7) est borné supérieurement par $\Delta-\ln \Delta$

Analyse du rapport probabilités identiques (fin)

Repartant de l'expression (4) et utilisant le fait que $|D| \leq n/2$, et que $|D^*| \geq n/(\Delta+1)$ on a :

$$\frac{\mathbb{E}(G, D, S)}{\mathbb{E}(G, D^*, S)} \leqslant \frac{(\Delta+1)\left(1-\frac{p}{2}\right)}{1+\Delta(1-p)^{\Delta}} \leqslant \frac{\Delta+1}{1+\Delta(1-p)^{\Delta}} \tag{8}$$

Si $p \leqslant \frac{\ln(e\Delta)}{(\Delta - \ln\Delta)}$, l'expression $\Delta(1-p)^{\Delta}$ dans le dénominateur de (8) est $\Delta(1-p)^{\Delta} \sim 1 + e^{-1} = 1.37$ et le rapport de (8) devient $\frac{(\Delta+1)}{2.37}$.

Rapport d'approximation probabilités distinctes

Proposition

Le problème de l'ensemble dominant a priori sous la stratégie S, avec probabilités de panne des sommets distinctes, admet un algorithme approché de rapport $\Delta^2 / \ln \Delta$, où Δ est le degré maximum de G

Corollaire

Le problème devient approximable à rapport constant dans les graphes à degré borné.

Algorithme approché :
Solution a priori $= V$.

Analyse du rapport (début)

Etant donné D^* un ensemble dominant a priori optimal et une probabilité p', partition des sommets de D^* :

- D_1^* : les sommets de D^* dont la probabilité est au moins p' ; $|D_1^*| = \kappa$;
- D_2^* : le reste des sommets de D^*, i.e., $D_2^* = D^* \setminus D_1^*$;
- $\bar{D}_1^*$: l'ensemble $\Gamma_{\bar{D}^*}(D_1^*)$ des voisins de D_1^* dans $\bar{D}^* = V \setminus D^*$, i.e., $\bar{D}_1^* = \Gamma(D_1^*) \cap \bar{D}^*$;
- $\bar{D}_2^*$: l'ensemble $\Gamma_{\bar{D}^*}(D_2^*) \setminus \bar{D}_1^*$, i.e., les sommets de $\bar{D}^*$ qui n'ont pas de voisin dans D_1^*, i.e., $\bar{D}_2^* = \bar{D}^* \setminus \Gamma_{\bar{D}^*}(D_1^*)$.

Analyse du rapport (2/5)

En dénotant p la plus grande probabilité et en utilisant la partition :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(G, D^*, S) &= \sum_{v_i \in D_1^*} p_i + \sum_{v_i \in D_2^*} p_i \\
&\quad + \sum_{v_i \in \bar{D}_1^*} p_i \prod_{v_j \in \Gamma(v_i) \cap D^*} (1 - p_j) + \sum_{v_i \in \bar{D}_2^*} p_i \prod_{v_j \in \Gamma(v_i) \cap D_2^*} (1 - p_j) \\
&\geqslant \kappa p' + \sum_{v_i \in D_2^*} p_i + (1-p)^{\Delta} \sum_{v_i \in \bar{D}_1^*} p_i + \left(1 - p'\right)^{\Delta} \sum_{v_i \in \bar{D}_2^*} p_i \qquad (9) \\
&\geqslant \sum_{v_i \in D_2^*} p_i + \left(1 - p'\right)^{\Delta} \sum_{v_i \in \bar{D}_2^*} p_i \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Analyse du rapport (3/5)

- Si $\sum_{v_i \in D_2^* \cup \bar{D}_2^*} p_i \geqslant \frac{\sum_{v_i \in V} p_i}{x}$:

$$\frac{\mathbb{E}(G, D, \mathrm{S})}{\mathbb{E}\left(G, D^*, \mathrm{S}\right)} \leqslant \frac{\sum\limits_{v_i \in V} p_i}{\sum\limits_{v_i \in D_2^*} p_i + (1-p')^{\Delta} \sum\limits_{v_i \in \bar{D}_2^*} p_i} \leqslant \frac{\sum\limits_{v_i \in V} p_i}{(1-p')^{\Delta} \sum\limits_{v_i \in D_2^* \cup \bar{D}_2^*} p_i}$$

$$\leqslant \frac{\sum_{v_i \in V} p_i}{(1-p')^{\Delta} \frac{\sum_{v_i \in V} p_i}{x}} \leqslant \frac{x}{(1-p')^{\Delta}} \tag{11}$$

- Si $\sum_{v_i \in D_2^* \cup \bar{D}_2^*} p_i \leqslant \frac{\sum_{v_i \in V} p_i}{x}$, alors :

$$\sum_{v_i \in D_1^*} p_i + \sum_{v_i \in \bar{D}_1^*} p_i \geqslant \left(\frac{x-1}{x}\right) \sum_{v_i \in V} p_i \tag{12}$$

Analyse du rapport (4/5)

- Suite $\sum_{v_i \in D_2^* \cup \bar{D}_2^*} p_i \leqslant \frac{\sum_{v_i \in V} p_i}{x}$:
  Comme $|D_1^*| = \kappa \Rightarrow |\bar{D}_1^*| \leqslant \Delta\kappa$, on a aussi :

$$\kappa\Delta p + \kappa p \geqslant \sum_{v_i \in D_1^*} p_i + \sum_{v_i \in \bar{D}_1^*} p_i \tag{13}$$

  De (12) et (13), on déduit :

$$\sum_{v_i \in V} p_i \leqslant \frac{x}{x-1}\kappa p(\Delta + 1) \tag{14}$$

  D'après (9), $\mathbb{E}(G, D^*, \mathrm{S}) \geqslant \kappa p'$ donne $\frac{\mathbb{E}(G,D,\mathrm{S})}{\mathbb{E}(G,D^*,\mathrm{S})} \leqslant \frac{\sum_{v_i \in V} p_i}{\kappa p'}$ qui d'après (14) devient :

$$\frac{\mathbb{E}(G, D, \mathrm{S})}{\mathbb{E}(G, D^*, \mathrm{S})} \leqslant \frac{xp(\Delta + 1)}{(x-1)p'} \leqslant \frac{x(\Delta + 1)}{(x-1)p'} \tag{15}$$

Analyse du rapport (fin)

En prenant $p' = \frac{\ln \Delta}{\Delta}$ et $x = \frac{\Delta}{\ln \Delta}$, alors les deux rapports de (11) et (15) deviennent $\approx \frac{\Delta^2}{\ln \Delta}$

Conclusion

- Amélioration des rapports proposés : nouvelles solutions a priori approchées
- Extension du modèle (coût du recours plus important d'un facteur $\alpha > 1$)